***Все, что познается, имеет число, ибо невозможно ни понять ничего, ни познать без него.***
***Пифагор***

# Економіко-математичні методи та моделі

УДК 330.46:53

**Сенчуков В. Ф.**

## ЗАСТОСУВАННЯ АДИТИВНИХ МАТРИЦЬ У ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

*Анотація. Розглядаються елементи теорії адитивних матриць та їхні застосування до розв'язання задач дискретної оптимізації.*

*Аннотация. Рассматриваются элементы теории аддитивных матриц и их применение к решению задач дискретной оптимизации.*

*Annotation. The elements of theory of additive matrices and their appendix to the solving of tasks of discrete optimization are examined.*

*Ключові слова: задача, модель, адитивна матриця, правильна конфігурація, зсунення, виправлення матриці, ескіз-матриця, оптимальний план, алгоритм.*

### Деякі застосування адитивних матриць

Перша частина статті, присвячена елементам теорії адитивних матриць, надрукована в журналі "Економіка розвитку" № 3 (51)'2009.

**Задача про призначення та її математична модель.** Нагадаємо **постановку задачі** [1], [2]: є в наявності кілька фахівців, які можуть виконувати різні види робіт-операцій, і відома корисність (ступінь кваліфікації, ефективність) виконання кожним виконувачем кожного виду роботи. Треба так призначити виконувачів робіт, щоб домогтися максимальної корисності за умови, що кожний виконавець може бути призначений тільки на одну роботу і за кожною роботою повинен бути закріплений тільки один виконавець.

Для формалізації постановки задачі, тобто для побудови її математичної моделі, вводять позначення відповідних числових характеристик (величин):

$n$ − число фахівців і одночасно − кількість видів робіт, тобто йдеться про закриту модель задачі;

$C=(c_{ij})_{n\times n}$ − **матриця корисності** ($c_{ij}>0$), кожний елемент якої $c_{ij}$ − корисність виконання $i$-м виконувачем $j$-ї роботи ($i, j=\overline{1,n}$);

$x_{ij}$ булеві змінні (**керовані змінні** − КЗ): $x_{ij}=1$, якщо $i$-й виконавець призначається на $j$-у роботу, і $x_{ij}=0$ в інших випадках;

$Z$ − **цільова функція** (сума добутків корисності $c_{ij}$ з відповідною (за індексами) КЗ $x_{ij}$).

**Математична модель** задачі виглядає так [1]:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \max. \qquad (37)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (38)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (39)$$

$$x_{ij}\ge 0,\ x_{ij}\in\{0,1\}. \qquad (40)$$

**Правильні конфігурації (ПК) у квадратних матрицях та постановка задачі "мовою ПК".** Для переходу до нетрадиційної постановки задачі про призначення введемо і означимо деякі поняття.

Нехай $C=(c_{ij})_{n\times n}$ − довільна квадратна матриця $n$-го порядку, а $P(c_{ij})$ − задана властивість, якою повинні володіти окремі елементи або сукупності елементів матриці. Природно елементи матриці розрізнювати не тільки за вартістю, а й за місцем їх у матриці, тобто зважати на те, на перетині яких рядка і стовпця розташований елемент.

Розглянемо $r$-підмножину $\{c_{ij}\}_1^r$, $1\le r\le n^2$, множини елементів матриці $C$. Будемо говорити, що $r$-множина, складена з елементів матриці $C$, **утворює конфігурацію** (або **є конфігурацією**) відносно властивості $P(c_{ij})$, якщо вона володіє цією властивістю. Приклади властивостей: "бути простим числом", "давати у сумі задане число", "бути нулем" тощо. Число $r$ назвемо **рангом** конфігурації.

Конфігурація $\{c_{i\,j_i}\}_1^n$ рангу $n$ називається **правильною** (ПК), якщо її елементи розташовані в різних рядках і різних стовпцях матриці:

$$\{c_{i\,j_i}\}_1^n -\text{ПК} \rightleftharpoons \{c_{i\,j_i}\}_1^n = \{c_{1j_1}, c_{2j_2}, ..., c_{n\,j_n}\} \Big| P(c_{i\,j}), \quad (41)$$

де другі індекси $j_1, j_2, ... j_n$ утворюють деяке перестав-лення з елементів множини $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$ − множини індексів.

Таким чином, за означенням, елементи ПК повинні задовольняти задану властивість $P(c_{i\,j})$ і займати місця в різних рядках і в різних стовпцях матриці $C$.

Наприклад, $n$ елементів квадратної матриці, добуток яких є членом її детермінанта, утворюють ПК; адитивні матриці порядку $n$ включають $n!$ ПК із властивістю $P_q(c_{i\,j})$ ="сума елементів $c_{i\,j}$ є сталою".

Аналізуючи модель (37) − (40) з точки зору введених понять, приходимо до **постановки задачі** про призначення "мовою ПК": у заданій матриці корисності $C = (c_{i\,j})_{n\times n}$ знайти ПК відносно властивості $P(c_{i\,j})$ = "сума елементів $c_{i\,j}$ максимізує сумарну ефективність призначень":

*дано* матрицю корисності (ефективності) $C = (c_{i\,j})_{n\times n}$;

*знайти* ПК $\{c_{i\,j_i}\}_1^n = \{c_{1j_1}, c_{2j_2}, ..., c_{n\,j_n}\} \Big| P(c_{i\,j})$.

На практиці частіше буває таке, що матриця не містить ПК відносно обраної властивості, тобто елементи, взяті по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця, не володіють заданою властивістю, або цією властивістю володіють елементи, що не належать різним рядкам і різним стовпцям. Тоді, щоб одержати ПК, матрицю можна **"виправити"** − замінити одні елементи матриці іншими, такими, що знаходяться на найменшій відстані (в обраному сенсі) від елементів, що заміняються.

Поняття "правильна конфігурація" можна поширити і на визначники, а також − на функціональні матриці і детермінанти.

З метою універсалізації підходу до розв'язання задачі (41) в сенсі відшукання ПК, які містять одні і ті ж елементи, незалежно від елементів матриці корисності, розглянемо ПК, складені з нулів, тобто множини $\{c_{i\,j_i}\}_1^n$ із властивістю $P_0(c_{i\,j})$ = "елемент $c_{i\,j}$ є нулем". Такі ПК назвемо **нульними** (ПК-0) і позначатимемо символом $\{0_{i\,j}\}_1^n$.

Рядки (стовпці) матриці, які не містять нулів, називаються **безнульними** рядками (стовпцями). Перенесення нуля з деякого рядка (стовпця) в безнульний рядок (стовпець) матриці назвемо **зсуненням нуля**, а **величиною зсунення нуля** − вартість елемента безнульного рядка (стовпця), на місце якого зсовується нуль. Якщо нуль залишається на місці (не зсовується), то величина зсунення дорівнює нулю. За певних умов зсунення нулів дає змогу отримати в матриці ПК-0.

Нехай матриця містить $n$ нулів, тобто існує конфігурація відносно властивості $P_0(c_{i\,j})$ = "елемент $c_{i\,j}$ є нулем", але вона не є правильною.

Під **процедурою виправлення матриці**, яка не включає ПК-0, будемо розуміти утворення ПК-0 за допомогою зсунення нулів з рядків (стовпців), де їх декілька, в безнульні рядки (стовпці) так, щоб сумарна величина зсунень, тобто сума величин усіх зсунень нулів, була найменшою. Матриця, яка є результатом процедури виправлення називається **виправленою матрицею.** Наприклад, у наведеній нижче матриці

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

немає ПК-0, але її можна виправити зсуненням елемента $c_{33} = 0$ на місце елемента $c_{11} = 1$: одержимо ПК-0 $\{c_{12}, c_{23}, c_{31}\}$; величина зсунення нуля дорівнює одиниці.

**Розв'язання задачі.** Нехай $C = (c_{i\,j})_{n\times n}$ − матриця ефективності в задачі (41), або, що те ж саме, в задачі (37) − (40). Утворимо дві пари адитивних матриць, елементами кожного рядка (стовпця) першої з них є найбільший елемент відповідного, за номером, рядка (стовпця) вихідної матриці, а другої − найменший елемент відповідного рядка (стовпця) матриці $C$:

$$\overline{C} = (\overline{c}_{i\,j})_{n\times n},$$

де $\forall i = \overline{1,n}: \ \overline{c}_{i\,j} = \max\limits_{\forall j\in I}\{c_{i\,j}\}$ та (42)

$$\forall j = \overline{1,n}: \ \overline{c}_{i\,j} = \max\limits_{\forall i\in I}\{c_{i\,j}\};$$

$$\underline{C} = (\underline{c}_{i\,j})_{n\times n},$$

де $\forall i = \overline{1,n}: \ \underline{c}_{i\,j} = \min\limits_{\forall j\in I}\{c_{i\,j}\}$ та

$$\forall j = \overline{1,n}: \ \underline{c}_{i\,j} = \min\limits_{\forall i\in I}\{c_{i\,j}\}. \quad (43)$$

Далі, для визначеності, розглядатимемо другу матрицю з першої пари (див. (42)). Знайдемо різницю $\overline{R}$ матриці $\overline{C}$ з вихідною матрицею $C$:

$$\overline{R} = (r_{i\,j})_{n\times n} = \overline{C} - C = (\overline{c}_{i\,j} - c_{i\,j})_{n\times n}. \quad (44)$$

У цій матриці на місці найбільшого елемента кожного стовпця матриці $C$ стоятиме нуль (0). Відповідну конфігурацію нулів назвемо **ескізом оптимального плану** (ОП) **призначень**, а саму матрицю $\overline{R}$ − **ескіз-матрицею**.

**Лема 1.** Якщо ескіз-матриця $\overline{R}$ включає ПК-0, то максимальне значення цільової функції дорівнює сумі найбільших елементів стовпців матриці корисності і навпаки:

$$\overline{R} \supset \{0_{ij}\}_1^n \Leftrightarrow Z_{\max} = \overline{c}_{\bullet j}. \qquad (45)$$

*Доведення.* Замінимо в математичній моделі задачі (37) − (40) матрицю $C$ матрицею $\overline{R}$, а функцію цілі $Z$ в (37) − функцією $\overline{Z}$ з коефіцієнтами $r_{ij}$ при керованих змінних. За таких умов отримаємо задачу на мінімум, причому $\overline{Z}_{\min} = 0$. Зважаючи, згідно з (44), на зв'язок між функціями $Z$, $\overline{Z}$ і їхніми оптимальними значеннями, а саме:

$$Z = \overline{c}_{\bullet j} - \overline{Z} \text{ і } Z_{\max} = \overline{c}_{\bullet j} - \overline{Z}_{\min}, \qquad (46)$$

приходимо до справедливості (45).

**Лема 2.** Якщо ескіз-матриця $\overline{R}$ не включає ПК-0, то максимальне значення цільової функції менше суми найбільших елементів стовпців матриці корисності і навпаки:

$$\overline{R} \not\supset \{0_{ij}\}_1^n \Leftrightarrow Z_{\max} < \overline{c}_{\bullet j}, \qquad (47)$$

причому

$$\overline{c}_{\bullet j} - Z_{\max} = \overline{Z}_{\min}. \qquad (48)$$

*Доведення* цієї леми, як і леми 1, базується на рівності (44).

**Теорема 7.** ОП призначень задачі (37) − (40) визначається ПК-0 виправленої ескіз-матриці, а значення цільової функції − сумою відповідних (за індексами) елементів матриці корисності.

*Доведення.* Згідно з означенням процедури виправлення матриці сумарна величина усіх зсунень нулів у виправленій ескіз-матриці $\overline{R}$ дорівнює $\overline{Z}_{\min}$ − числу, на яке $Z_{\max}$ менше суми найбільших елементів стовпців матриці корисності $\overline{c}_{\bullet j}$ (див. (48)). Таким чином, ПК-0 $\{0_{ij}\}_1^n$ виправленої матриці забезпечує оптимальне значення цільової функції:

$$Z_{\max} = \overline{c}_{\bullet j} - \overline{Z}_{\min}. \qquad (49)$$

Індекси елементів ПК-0 $\{0_{ij}\}_1^n$ виправленої матриці вказують, на яку роботу $j$ призначається виконавець $i$, що й визначає ОП призначень та вартість цільової функції.

Структурна схема (рисунок) розв'язання задачі виглядає так:

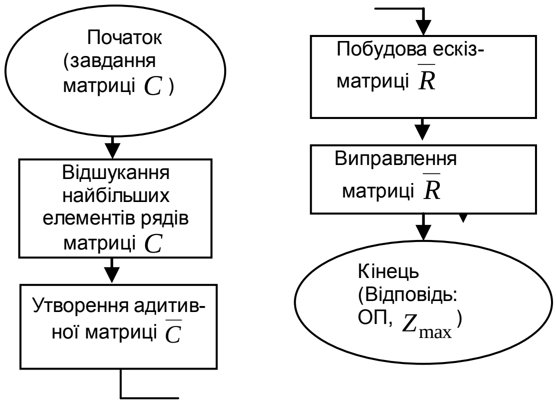


Рис. **Структурна схема розв'язання задачі**

Реалізацію запропонованого підходу до розв'язаня задачі про призначення розглянемо на прикладі матриці п'ятого порядку.

**Задача 1.** Знайти оптимальний план призначень за заданою матрицею корисності:

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 11 & 7 & 15 \\ 7 & 10 & 11 & 6 & 12 \\ 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 11 \\ 3 & 8 & 11 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \end{matrix}$$

*Розв'язання.* Візуальний аналіз показує, що у третього фахівця найкращі показники корисності за всіма видами робіт, а п'ята операція-робота, мабуть, найлегша, бо всі претенденти мають високий показник ефективності.

*Знаходимо* найбільші елементи стовпців матриці $C$: 16, 18, 17 ,19, 20 (вони вказані нижче самої матриці); *складаємо* адитивну матрицю $\overline{C}$, елементи стовпців якої − найбільші елементи відповідних (за номером) стовпців матриці $C$; *будуємо* ескіз-матрицю $\overline{R}$ і *виправляємо* її:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \\ 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \\ 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \\ 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \\ 16 & 18 & 17 & 19 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{R} = \overline{C} - C = \begin{bmatrix} (2) & 6 & 6 & 12 & 5 \\ 9 & 8 & (6) & 13 & 8 \\ 0 & (0) & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 17 & 13 & 17 & (9) \\ 13 & 10 & 6 & (4) & 3 \end{bmatrix}.$$

Місця, що відповідають зсуненим нулям у виправленій матриці $\overline{R}$, позначені круглими дужками, в яких указуються величини зсунень. Індекси елементів ПК-0 виправленої матриці $\overline{R}$ визначають ОП призначень: відповідні (за індексами) елементи матриці $C$ − це елементи ПК із властивістю $P(c_{ij})$ = "сума елементів $c_{ij}$ максимізує сумарну ефективність призначень" (див. (41)). За формулою (49) підрахуємо оптимальне значення цільової функції:

$$Z_{\max} = \bar{c}_{\bullet j} - \bar{Z}_{\min} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \bar{c}_{\bullet j} = 90, \\ Z_{\min} = 21 \end{array} \right| \Rightarrow Z_{\max} = 69.$$

Зауваження:

1. При залученні інших, із чотирьох, матриць (42), (43) до розв'язання задач на максимум чи мінімум легко встановити справедливість тверджень, аналогічних лемам 1, 2 і теоремі 7, які наведені вище.

2. За тією ж структурною схемою (див. рисунок) діють, відштовхуючись від найбільших елементів не стовпців, а рядків, матриці $C$. Для створення ПК-0 можна аналізувати (з метою виправлення) обидві ескіз-матриці, при цьому, можливо, буде знайдено різні розв'язки (якщо їх існує декілька).

3. Створення ПК можна здійснювати на основі адитиваційних матриць по відношенню до матриці корисності чи ескіз-матриці; як показують числові експерименти, такий підхід може відразу привести до ПК.

4. На підставі властивостей адитивних матриць легко показати, що однією з обставин, яка сприяє наявності кількох розв'язків задачі, є існування адитивних підматриць у матриці корисності. За певних умов можна дати оцінку кількості розв'язків задачі або вказати їх число.

**Транспортна задача (ТЗ) за критерієм вартості. Постановка задачі** [3], [4] . Є в наявності постачальники (відправники) деякого однорідного вантажу і його споживачі (одержувачі). Відома вартість перевезення одиниці вантажу − тариф − від кожного відправника до кожного одержувача. Треба скласти план перевезень, який забезпечує мінімальні сумарні (загальні) витрати на перевезення вантажу.

Для формалізації поставленої задачі − побудови математичної моделі "мовою ПК"− введемо позначення її складових та відповідних числових характеристик у традиційній моделі:

$m$ ($n$) − число відправників (одержувачів);

$A_i, i = \overline{1, m}$ ($B_j$, $j = \overline{1, n}$) − постачальники (споживачі);

$a_i$, $i = \overline{1, m}$ ($b_j$, $j = \overline{1, n}$) − запаси відправників (потреби одержувачів), причому виконується співвідношення − **умова балансу:**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ ; \qquad (50)$$

$C = (c_{i\,j})_{m\times n}$ − **матриця тарифів** ($c_{i\,j} > 0$), кожний елемент якої $c_{i\,j}$ − вартість перевезення одиниці вантажу від $i$-го постачальника до $j$-го споживача;

$x_{i\,j}$ − **керовані змінні** ($x_{i\,j} \geq 0$) − число одиниць вантажу, який призначується до відправлення від постачальника $A_i$ до одержувача $B_j$;

$Z$ − **цільова функція** (сума добутків тарифів $c_{i\,j}$ на відповідні (за індексами) керовані змінні $x_{i\,j}$).

Задача лінійного програмування виглядає так: знайти мінімум функції цілі

$$Z = \sum_{i,j} c_{i\,j} x_{i\,j} \to \min \qquad (51)$$

при виконанні системи обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i\,j} = a_i, \ i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i\,j} = b_j, \ j = \overline{1, n} \qquad (52)$$

з урахуванням умови балансу (розглядається закрита модель задачі).

Зведемо вихідні дані в таблицю-матрицю (табл. 1) з двома входами: $a_i$ та $b_j$, в комірках зліва вгорі помістимо тарифи $c_{i\,j}$, а справа знизу будемо записувати значення керованих змінних $x_{i\,j}$, тобто величину перевезеного вантажу від постачальника $A_i$ до одержувача $B_j$.

Таблиця 1

**Матриця тарифів та перевезень**

| $a_i$ \ $b_j$ | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | | $c_{1n}$ $x_{1n}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | | $c_{2n}$ $x_{2n}$ |
| ⋮ | | | | |
| $a_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | | $c_{mn}$ $x_{mn}$ |

Формалізація постановки задачі "мовою конфігурацій" потребує введення додаткових понять. Нехай $\{c_{i\,j_i}\}_1^n$ є ПК відносно деякої властивості $P(c_{i\,j})$. Конфігурація $\{c_{i\,j}\}_1^r$, $n < r \leq 2n-1$, називається **розширеною правильною конфігурацією** ($\overline{ПК}$) відносно властивості $P(c_{i\,j})$, якщо вона включає в себе ПК рангу $n$.

**Постановка задачі "мовою $\overline{ПК}$"**: за заданими векторами запасів відправників $A_i$ і потреб одержувачів $B_j$: $(a_1, a_2, ..., a_m)^T$, $(b_1, b_2, ..., b_n)$, згідно з матрицею тарифів $C = (c_{i\,j})_{m\times n}$ знайти $\overline{ПК}$ в матриці $C$ відносно властивості $P_{\min}(c_{i\,j})$ = "розподіл запасів вантажу згідно з елементами $c_{i\,j}$ конфігурації забезпечує мінімальні витрати на його перевезення від відправників до одержувачів" ( $T$ – символ транспонування вектора).

Алгоритм розв'язання поставленої ТЗ наведемо в супроводі розгляду конкретної задачі.

**Задача 2.**

*Дано:*

$(10,\ 30,\ 50,\ 60)^T$ – вектор запасів;

$(20,\ 35,\ 40,\ 55)$ – вектор потреб;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$ – матриця тарифів.

*Знайти* $\overline{\text{ПК}}$ в матриці $C$ із властивістю $P_{\min}(c_{ij})$.

*Розв'язання* задачі здійснюємо в наведеному нижче порядку.

1[0]. *Відшукуємо* в матриці тарифів ПК зі властивістю $P(c_{ij})$ = "сума елементів $c_{ij}$ є мінімальною" аналогічно тому, як це робилося при розв'язанні задачі про призначення, а саме:

установлюємо найменші елементи стовпців матриці $C$ (замість стовпців можна брати рядки);

утворюємо адитивну матрицю $\underline{C}$, елементи стовпців якої є мінімальними елементами стовпців матриці $C$;

знаходимо різницю $\underline{R} = C - \underline{C}$, тобто ескіз-матрицю шуканої ПК;

виправляємо матрицю $\underline{R}$ зсуненням нулів, отримуючи таким чином ПК відносно властивості $P(c_{ij})$:

$$\underline{R} = C - \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{1} & 10 & 6 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & \underline{4} \\ 9 & 6 & \underline{4} & 7 \\ 5 & \underline{3} & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0) & 7 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & (0) \\ 8 & 3 & (2) & 3 \\ 4 & (0) & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Відповідні елементи ПК в матриці $C$ підкреслені рисочками.

2[0]. *Здійснюємо* вивезення/завезення вантажу згідно з найденою ПК, тобто будуємо ескіз-матрицю оптимального плану (ОП) перевезень (табл. 2).

Таблиця 2

**Ескіз-матриця ОП**

| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 35 | 40 | 55 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 / 10 | 10 | 6 | 5 |
| 30 | 8 | 5 | 7 | 4 / 30 |
| 50 | 9 | 6 | 4 / 40 | 7 |
| 60 | 5 | 3 / 35 | 2 | 8 |

3[0]. *Знаходимо* $\overline{\text{ПК}}$, для чого виправляємо ескіз-матрицю, здійснюючи перерозподіл між замовниками не повністю вивезеного вантажу за пріоритетом меншого тарифу (табл. 3).

Таблиця 3

**Виправлена матриця**

| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 35 | 40 | 55 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 / 10 | 10 | 6 | 5 |
| 30 | 8 | 5 | 7 | 4 / 30 |
| 50 | 9 | 6 | 4 / (40) 25 | 7 / 25 |
| 60 | 5 / 10 | 3 / 35 | 2 / 15 | 8 |

4[0]. *Виписуємо* оптимальний план $X_{opt}$ і *підраховуємо* витрати на перевезення вантажу:

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 25 & 25 \\ 10 & 35 & 15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z_{\min} = 1 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 4 \cdot 25 + 7 \cdot 25 + \\ + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 35 + 2 \cdot 15 = 590.$$

Безумовно, найбільш відповідальною ланкою алгоритму розв'язання задачі є процедура виправлення ескіз-матриці. Доопрацювання потребує формалізація одержання $\overline{\text{ПК}}$ (і в квадратних, і в прямокутних матрицях).

Запропонований підхід до розв'язання ТЗ має переваги перед широко застосовуваним методом потенціалів: він дозволяє, спираючись на ПК, уникнути багаторазового (як правило) перераховування за циклом.

---

**Література:** 1. Кузнецов А. В. Высшая математика: Мат. программир. : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн. : Высшая школа, 1994. – 286 с. 2. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. И. Виноградов. – В. 5 т. – М. : Советская Энциклопедия. – Т. 1, 1977. – 1152 с. ; т. 2, 1979. – 1104 с.; т. 3, 1982. – 1184 с. ; т. 4, 1984. – 1216 с. ; т. 5, 1985. – 1248 с. 3. Карпелевич Ф. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. – М. : Физматгиз, 1963. – 276 с. 4. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Сборник задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Вища школа, 1990. – 240 с.

*Стаття надійшла до редакції 14.12.2009 р.*